Что такое уравнения вингсьюта?

$$\frac{\dot{\vec{V}}}{g} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - V\begin{bmatrix}K_d & -K_l\\ K_l & K_d\end{bmatrix}\vec{V}$$

Уравнения вингсьюта — это дифференциальные уравнения движения, описывающие полет вингсьюта в вертикальной плоскости. Простые и красивые, они позволяют с высокой точностью моделировать полет вингсьюта, зная только установившуюся скорость.

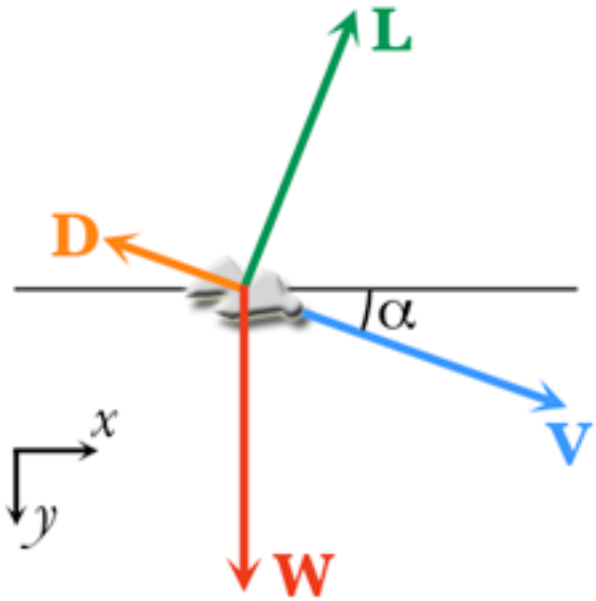
Когда мы думаем о моделировании полета вингсьюта, задача кажется неразрешимой. Чтобы вычислить траекторию, нужно точно знать силы, действующие на тело в любой момент времени, для вычисления ускорения. Зная начальную скорость, можно затем численно проинтегрировать ускорение, чтобы получить скорость в любой момент, и далее проинтегрировать скорость, чтобы получить полную траекторию. Но каким образом мы можем знать силы?

Аэродинамические силы, действующие на летящее тело — подъемная сила и сопротивление —

пропорциональны плотности воздуха, площади, коэффициентам подъемной силы и сопротивления, соответственно, и квадрату воздушной скорости. Мы не знаем точно площадь и коэффициенты подъемной силы и сопротивления; последние зависят от угла атаки и позиции тела. Похоже, мы не можем вычислить аэродинамические силы, а значит, не можем и моделировать полет.

Но с небольшой помощью *чистой магии полета* (в английском — игра слов: *pure flying magic*)… мы можем!

Рассмотрим диаграмму сил, действующих на пилота. Мы имеем 3 силы: вес $W=mg$, подъемную силу $L=½C_l·ρ·S·V^2$, которая перпендикулярна вектору текущей скорости V, и силу лобового сопротивления $D=½C_d·ρ·S·V^2$, которая действует в обратном направлении скорости. Здесь C_l и C_d — безразмерные коэффициенты подъемной силы и сопротивления, соответственно, $ρ$ — плотность воздуха, а S — площадь вингсьюта в плане.



Если текущий угол глиссажа равен α, то горизонтальные составляющие подъемной силы и сопротивления равны $L\sin\alpha$ и $-D\cos\alpha$, вертикальные составляющие равны $-L\cos\alpha$ и $-D\sin\alpha$. Таким образом, мы имеем два ньютоновских уравнения движения:

$$F_x = ma_x = L\sin\alpha - D\cos\alpha$$

$$F_y = ma_y = mg - L\cos\alpha - D\sin\alpha$$

где $a_x=dV_x/dt$, $a_y=dV_y/dt$ — горизонтальное и вертикальное ускорения, V_x и V_y — горизонтальная и вертикальная составляющие полной скорости

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Так как sinα=V_y/V, cosα=V_x/V, уравнения могут быть переписаны в виде

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\rho S}{m} V\left(C_l V_y - C_d V_x\right)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = g - \frac{1}{2}\frac{\rho S}{m} V\left(C_l V_x + C_d V_y\right)$$

Эти уравнения, кажется, только поддерживают сомнения, что они могут быть решены, так как мы не знаем C_l, C_d и S. Нужны исчерпывающие эксперименты в аэродинамической трубе, чтобы найти C_l и C_d для разных углов атаки.

И здесь на помощь приходит магия. Введем “волшебные” коэффициенты подъемной силы и сопротивления, определяемые выражениями

$$K_l = \frac{1}{2}\frac{\rho S}{mg}C_l$$

$$K_d = \frac{1}{2}\frac{\rho S}{mg}C_d$$

Уравнения движения теперь преобразуются в

$$\frac{dV_x}{dt} = gV(K_l V_y - K_d V_x)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = g - gV(K_l V_x + K_d V_y)$$

Но мы все-таки не знаем K_l и K_d… или знаем?

Предположим, что при текущей позиции тела и угле атаки установившиеся горизонтальная и вертикальная скорости пилота равны V_{xs} и V_{ys}. Так как при установившемся полете ускорение равно нулю по определению, уравнения переписываются как

$$gV_s(K_l V_{ys} - K_d V_{xs}) = 0$$

$$g - gV_s(K_l V_{xs} + K_d V_{ys}) = 0$$

где V_s — полная установившаяся скорость. Эти два уравнения с двумя неизвестными легко решаются для K_l и K_d:

$$K_l = \frac{V_{xs}}{V_s^3}$$

$$K_d = \frac{V_{ys}}{V_s^3}$$

Заметьте, что отношение этих коэффициентов равно аэродинамическому качеству полета:

$$\frac{K_l}{K_d} = \frac{V_{xs}}{V_{ys}} = \frac{L}{D}$$

Теперь неизвестные аэродинамические параметры (загрузка крыла mg/S и аэродинамические коэффициенты C_l, C_d) “спрятаны” внутри коэффициентов K_l и K_d, которые могут быть легко вычислены из установившихся горизонтальной и вертикальной скоростей для данного режима полета, позволяя нам решить уравнения движения. Как видите, иногда нужно просто замести проблемы под ковер, и внезапно он превращается в волшебный ковер-самолет. Это магия… чистая магия полета!

Система дифференциальных уравнений, которую мы только что вывели, называется уравнениями вингсьюта:

$$\frac{dV_x}{dt} = gV\left(K_l V_y - K_d V_x\right)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = g - gV\left(K_l V_x + K_d V_y\right)$$

Они могут быть также записаны в элегантной матричной форме:

$$\frac{\dot{\vec{V}}}{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - V \begin{bmatrix} K_d & -K_l \\ K_l & K_d \end{bmatrix} \vec{V}$$

Простейший случай — это когда K_l и K_d постоянны в течение всего полета (это означает, что пилот поддерживает постоянное положение тела и угол атаки на протяжении всего полета). Предположим, вы измерили ваши установившиеся скорости для лучшего качества полета L/D на скайдайве, используя GPS в условиях полного штиля, и они равны V_{xs}=90mph, V_{ys}=36mph (L/D=2.5). Если вы сделаете бейс-прыжок, поддерживая в точности такое же положение тела и изменяя наклон тела к горизонту таким образом, чтобы угол атаки был таким же на протяжении всего полета, то мы имеем уравнения вингсьюта с постоянными известными коэффициентами K_l и K_d, вычисленными из установившихся скоростей, как показано выше, и они могут быть легко решены численно. Зная всего два числа, измеренные на скайдайве, мы можем вычислить траекторию и скорость в каждый момент бейс-прыжка!

Если угол атаки и позиция тела непостоянны в течение полета, нам нужно знать различные режимы полета (комбинации V_{xs} и V_{ys}, или, эквивалентно, K_l и K_d) при разных углах атаки. Режимы полета могут быть измерены, выполняя установившийся полет в каждом режиме на скайдайве, или же анализируя данные неустановившегося полета на бейс-прыжке. При интегрировании уравнений вингсьюта, используется режим полета, соответствующий текущему углу атаки, чтобы вычислить состояние полета в следующий момент времени, и так далее.

Насколько практично предположение о постоянном режиме полета на бейс-прыжке? В первые 2-3 секунды, пока вы только переходите от экзита в полет, аэродинамические силы достаточно малы, так что существенное изменение угла атаки и соответственно, коэффициентов подъемной силы и сопротивления, не имеет практически никакого эффекта на общий полет. Лучшие полеты чувствуются плавными и эффективными от экзита до открытия — вы быстро и плавно переходите в пикирование с малым углом атаки, “замораживаете” ваше тело и плавно изменяете наклон тела к горизонту по мере полета, так чтобы поддерживать угол атаки близко к вашему наиболее эффективному режиму полета. В этом случае, предположение постоянного режима полета достаточно практичное. Если вы сравните траектории, вычисленные с использованием уравнений вингсьюта, с вашими GPS данными, вы увидите поразительно хорошее согласие между теорией и практикой — по крайней мере, для полетов, которые ощущаются плавными и эффективными.

Уравнения вингсьюта были так названы, потому что они были впервые выведены при исследовании именно динамики полета вингсьюта. Несмотря на то, что они в равной мере применимы к любому виду бездвигательного двухмерного парящего полета, их практическая ценность для полетов в вингсьюте (особенно для вингсьют бейса) делает их особенно интересными именно для вингсьют-пилотов, поэтому и такое название.

Уравнения вингсьюта впервые были опубликованы на форуме dropzone.com 7 декабря 2006 года: http://www.dropzone.com/cgi-bin/forum/gforum.cgi?post=2563135